

3427. Nem lehetséges. $AB = c$, $BE = y$, $ED = AE = x$, $BE = y$, $AD = CD = 2 \cdot x$, $\angle CBE = \angle ABE = \varphi$. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt az ABC háromszögre:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{x}{3 \cdot x}, \text{ ebből } BC = 3 \cdot c. \text{ Alkalmazzuk a szögfelezőtételt a } BCE \text{ háromszögre: } \frac{y}{3 \cdot c} = \frac{x}{2 \cdot x}, \text{ ebből } y = \frac{3}{2} \cdot c, \angle ABC = \angle ABE + \angle BCE, \text{ azaz } \frac{c \cdot 3 \cdot c \cdot \sin 2\varphi}{2} = \frac{c \cdot \frac{3}{2} \cdot c \cdot \sin \varphi}{2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot c \cdot 3 \cdot c \cdot \sin \varphi}{2}, \text{ ebből előbb-utóbb levezethetjük, hogy } \cos \varphi = 1, \text{ tehát } \varphi = 0. \text{ Ez nem lehetséges.}$$

3428. Legyen $AB = BC = CA = a$. Tegyük fel például, hogy PB a leghosszabb a PA , PB , PC közül. Alkalmazzuk Bretschneider tételét az $ABCP$ négyszögre! $PB^2 \cdot AC^2 = AB^2 \cdot PC^2 + BC^2 \cdot PA^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot PC \cdot PA \cdot \cos(\varphi + 60^\circ)$, ahol $\angle ABC = 60^\circ$ és $\angle APC = \varphi$. Az egyenlethből kaphatjuk, hogy $PB^2 = PC^2 + PA^2 - 2 \cdot PC \cdot PA \cdot \cos(\varphi + 60^\circ)$. Alkalmazzunk erre egy felső becslést! $PB^2 = PC^2 + PA^2 - 2 \cdot PC \cdot PA \cdot \cos(\varphi + 60^\circ) \leq PC^2 + PA^2 + 2 \cdot PA \cdot PC = (PC + PA)^2$. Ebből $PB < PA + PC$. Egyenlőség nem lehet, mert akkor $\cos(\varphi + 60^\circ) = -1$ lenne, de ekkor $\varphi = 120^\circ$ lenne. Ez pedig akkor és csak akkor lenne, ha P rajta lenne a körülírt körön. Keresünk további megoldásokat a feladatra, mert vannak!

3429. $\angle EDB = 30^\circ$. $\angle EDB = x$, $\angle BED = 160^\circ - x$. Alkalmazzuk a szinusztételt a BED háromszögre, majd a BCD háromszögre! (1) $\frac{BD}{BE} = \frac{\sin(160^\circ - x)}{\sin x}$; (2) $\frac{BD}{BC} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}$ és tudjuk, hogy $\sin 80^\circ = 2 \cdot \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ$ és $BE = BC$. Ezekből kaphatjuk, hogy $\frac{\sin(160^\circ - x)}{\sin x} = 2 \cdot \cos 40^\circ$. Ebből kaphatjuk, hogy $\sin(20^\circ + x) = 2 \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin x$.

$\sin 20^\circ \cdot \cos x + \cos 20^\circ \cdot \sin x = 2 \cdot (\cos 60^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ) \cdot \sin x$. Ezt addig alakítsuk, amíg $\cos x = \sqrt{3} \cdot \sin x$, azaz $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nem lesz.

3430. $x = 60^\circ$ az átlók hajlásszöge. Legyen x az átlók hajlásszöge és E az átlók metszéspontja. $\angle ABE = x - 15^\circ$; $\angle BCE = 90^\circ - x$; $\angle CDE = x - 30^\circ$; $\angle DAE = 105^\circ - x$. Alkalmazzuk a szinusztételt az AEB , BEC , CED , illetve a DEA háromszögre! $\frac{AE}{BE} = \frac{\sin(x - 15^\circ)}{\sin 15^\circ}$;

$$\frac{BE}{CE} = \frac{\sin(90^\circ - x)}{\sin 90^\circ}; \quad \frac{CE}{DE} = \frac{\sin(x - 30^\circ)}{\sin 30^\circ}; \quad \frac{DE}{AE} = \frac{\sin(105^\circ - x)}{\sin 75^\circ}. \text{ Szorozzuk össze az egyenletek megfelelő oldalait! Kaphatjuk, hogy } 1 = \frac{\sin(x - 15^\circ)}{\sin 15^\circ} \cdot \frac{\sin(90^\circ - x)}{\sin 90^\circ} \cdot \frac{\sin(x - 30^\circ)}{\sin 30^\circ}.$$

$$\sin(x - 15^\circ) \cdot \sin(90^\circ - x) \cdot \sin(x - 30^\circ) \cdot \sin(105^\circ - x) = \frac{1}{2} \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ,$$

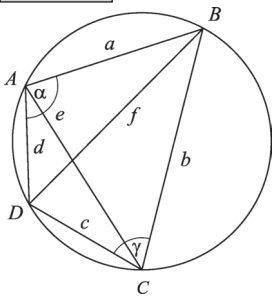
$$(2 \cdot \sin(x - 15^\circ) \cdot \sin(105^\circ - x)) \cdot (2 \cdot \sin(x - 30^\circ) \cdot \sin(90^\circ - x)) = 2 \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ,$$

$$(\cos(2 \cdot x - 120^\circ) - \cos 90^\circ) \cdot (\cos(2 \cdot x - 120^\circ) - \cos 60^\circ) = \frac{1}{2},$$

$$\cos^2(2 \cdot x - 120^\circ) - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x - 120^\circ) - \frac{1}{2} = 0. \text{ Oldjuk meg a kapott egyenletet!}$$

IV

3431.



3431. Alkalmazzuk a koszinusztételt kétszer az f átlóra felírva!

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos \alpha; \quad f^2 = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos \gamma, \quad \text{ebből}$$

$$a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos \gamma,$$

$$a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos(180^\circ - \alpha),$$

$$a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos \alpha = c^2 + d^2 + 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos \alpha, \quad \text{tehát}$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - c^2 - d^2}{2 \cdot (a \cdot d + c \cdot d)}.$$

3432. a) Mint tudjuk, $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$, mert $\frac{\alpha}{2} < 90^\circ$,

másrészt $\cos \alpha =$

$$= \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2 \cdot (a \cdot d + b \cdot c)}. \quad \text{Így } 1 - \cos \alpha = \dots = \frac{(b + c + a - d)(b + c + d - a)}{2 \cdot (a \cdot d + b \cdot c)}. \quad \text{Ezekből kaphatjuk,}$$

$$\text{hogy } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(b + c + d - a)(a + b + c - d)}{a \cdot d + b \cdot c}}. \quad \text{b) Használjuk fel, hogy } \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \text{ha } \frac{\alpha}{2} < 90^\circ. \quad \text{Az a) feladathoz hasonlóan kaphatjuk, hogy } \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(a + d + b - c)(a + d + c - b)}{a \cdot d + b \cdot c}}. \quad \text{c) Vegyük figyelembe, hogy } a + b + c + d = 2 \cdot s;$$

$$b + c + d - a = 2 \cdot (s - a); \quad a + c + d - b = 2 \cdot (s - b); \quad a + b + d - c = 2 \cdot (s - c);$$

$$a + b + c - d = 2 \cdot (s - d). \quad \text{Ha ezeket alkalmazzuk az a) és a b) megfelelő tételre, akkor kap-$$

$$\text{juk, hogy } \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - d)}{a \cdot d + b \cdot c}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{a \cdot d + b \cdot c}}. \quad \text{Osszuk el egymással a kapott}$$

$$\text{egyenletek megfelelő oldalait! Kaphuk, hogy } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - d)}{(s - b)(s - c)}}.$$

3433. Legyen $AB = a, BC = b; CD = c$ és $DA = d, \sphericalangle BAD = \alpha, \sphericalangle BCD = \gamma$ az $ABCD$

$$\text{húrnégyszögben. } t_{ABD} = \frac{a \cdot d \cdot \sin \alpha}{2}; \quad t_{BCD} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \gamma}{2}. \quad \text{Így } t = t_{ABD} + t_{BCD} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \sin \alpha. \quad \text{Használjuk fel, hogy } \sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}! \quad \text{Korábban láttuk,}$$

$$\text{hogy } \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - d)}{a \cdot d + b \cdot c}} \quad \text{és} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{a \cdot d + b \cdot c}}, \quad \text{ezeket felhasználva kaphuk,}$$

$$\text{hogy } t = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

3434. Legyen $AB = a, BC = b; CD = c$ és $DA = d, AC = e, BD = f, \sphericalangle BAD = \alpha, \sphericalangle BCD = \gamma$

az $ABCD$ húrnégyszögben. (1) $f^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos \alpha$, (2) $f^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \gamma$.

Vegyük figyelembe, hogy $\cos \alpha = -\cos \gamma$. Ezután szorozzuk az (1) egyenletet $b \cdot c$ -vel, majd a (2) egyenletet szorozzuk $a \cdot d$ -vel, majd adjuk össze a kapott két új egyenletet! Némely egyen-

$$\text{letrendezés után innen kaphatjuk, hogy: } f = \sqrt{\frac{(a \cdot c + b \cdot d)(a \cdot b + c \cdot d)}{a \cdot d + b \cdot c}}. \quad \text{Hasonlóan kaphatjuk}$$

a másik átló hosszát.

3435. Legyen $AB = a, BC = b; CD = c$ és $DA = d, AC = e, BD = f, \angle BAD = \alpha, \angle BCD = \gamma$ az $ABCD$ húrnégyszögben. Ekkor $f = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha$. Miért? Az előző feladatban kaptuk, hogy

$$f = \sqrt{\frac{(a \cdot c + b \cdot d)(a \cdot b + c \cdot d)}{a \cdot d + b \cdot c}}. \text{ Másrészt } \sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}. \text{ Használjuk még fel a ko-}$$

rábban levezetett $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$ és $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{a \cdot d + b \cdot c}}$ képleteket. Ezen-

kívül tudjuk, hogy $t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. Ezeket felhasználva kaphatjuk, hogy

$$t = \frac{\sqrt{(a \cdot b + c \cdot d)(a \cdot c + b \cdot d)(a \cdot d + b \cdot c)}}{4 \cdot t}.$$

3436. Legyen $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, ekkor szorozzuk meg az egyenlőséget ennek a kétszeresével.

$$2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot S_n = 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin x + 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin 2x + \dots + 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin nx. \text{ Használjuk fel, hogy}$$

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \cos(\beta - \alpha) - \cos(\alpha + \beta). \text{ Így } 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot S_n =$$

$$= \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) + \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) + \dots + \left(\cos \left(\left(n - \frac{1}{2} \right) \cdot x \right) - \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot x \right) \right) =$$

$$= \cos \frac{x}{2} - \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot x \right), \text{ ebből } S_n = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot x \right)}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}. \text{ Már ez is lehet végered-}$$

mény, de tovább is fejleszthetjük. Majd alkalmazzuk a koszinuszok különbségére ismert követ-

kező képletet: $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$. Kapjuk, hogy

$$S_n = \frac{\sin \left(\frac{(n+1) \cdot x}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{nx}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}}. \text{ Másrészt gondoljuk meg, hogy ha } \sin \frac{x}{2} = 0, \text{ akkor } S_n = 0.$$

3437. Igazoljuk először a (*) összefüggést: $(*) 4 \cdot \cos(kx) \cdot \sin^2 \frac{x}{2} =$

$= -\cos((k-1) \cdot x) + 2 \cdot \cos(kx) - \cos((k+1) \cdot x)$, mégpedig úgy, hogy az összefüggés jobb oldalából indulunk ki és kétszer alkalmazzuk rá a koszinuszok különbségére vonatkozó azonosságot. Ezután alkalmazzuk a (*) azonosságot $k = 1$ -től $k = n$ -ig, majd ezeket adjuk össze.

$$4 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \cdot (\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx) = -1 + \cos x + \cos nx - \cos((n+1) \cdot x). \text{ Ezt}$$

$$\text{alakítsuk tovább! } = -2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} + \cos nx - \cos((n+1) \cdot x) =$$

$$= -2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} + \cos nx - \cos(nx+x) = -2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} + \cos nx - \cos nx \cdot \cos x + \sin nx \cdot \sin x =$$

$$= -2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} + \cos nx \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} + \sin nx \cdot 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}. \text{ (Legyen először } \sin \frac{x}{2} \neq 0.)$$

IV

$$\begin{aligned} \text{Ebből kaphatjuk, hogy } \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx &= -\frac{1}{2} + \cos nx + \frac{\sin nx \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{x}{2} \cdot \cos nx + \sin nx \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \cdot x\right)}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

mutassuk meg, hogy más alakú végeredmény is lehet, például:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\sin nx \cdot \cos((n+1) \cdot x)}{\sin \frac{x}{2}}. \text{ Legyen most } \sin \frac{x}{2} = 0, \text{ ekkor}$$

gondoljuk meg, hogy a vizsgált összeg értéke 0.

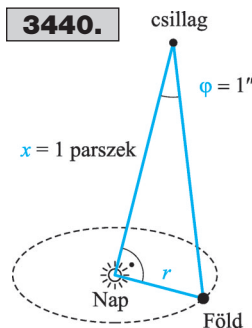
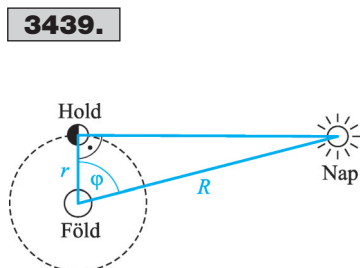
Néhány „gyakorlatibb” trigonometriai feladat

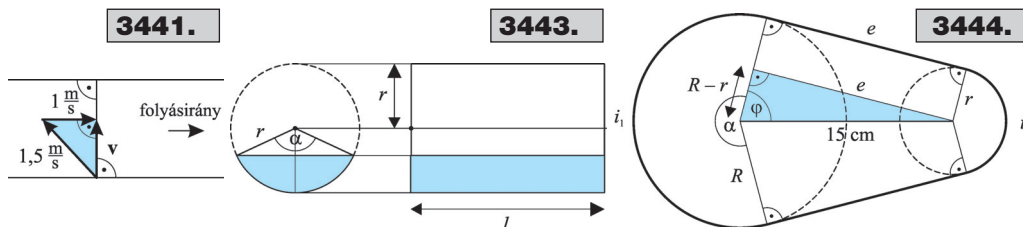
3438. a) London az $51^\circ 33'$ északi szélességen (és 0° földrajzi hosszúságon) fekszik. b) London és ellenlábásának távolsága éppen a Föld átmérője: 12 756 km. c) $r \approx 4994,94$ km London távolsága a Föld forgástengelyétől. $\frac{r}{R} = \sin 51^\circ 33'$, ahol $R = 6378$ km a Föld sugara.

d) $v \approx 416,245 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. London sebessége a Föld tengelye körüli forgásban. $v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T}$, ahol $T = 24$ h.

3439. a) $\frac{R}{r} \approx 19$ -szer távolabb van a Nap a Földtől, mint a Hold a Földtől, Arisztarkhosz szerint. $\frac{r}{R} = \cos \varphi$, ahol $\varphi = 87^\circ$. b) $\frac{R}{r} \approx 390$ -szer távolabb van a Nap a Földtől, mint a Hold a Földtől a modernebb mérés szerint. Itt $\varphi = 89^\circ 51' 10''$.

3440. a) $x \approx 3,094 \cdot 10^{13}$ km 1 parszek. $\frac{r}{x} = \text{tg } \varphi$, ahol r a Nap és a Föld távolsága, $\varphi = 1''$. b) $\approx 9,467 \cdot 10^{12}$ km 1 fényév. c) $\approx 3,27$ fényév 1 parszek. d) $\approx 2,7$ parszek $\approx 8,83$ fényév.





3441. $a) \approx 1,12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a csónak eredő sebessége. $b) \alpha \approx 41,81^\circ$ irányba evezzünk, enyhén szembe a folyó folyásirányával. $c) \approx 53,6$ s az átkelési időnk.

3442. $a) \varphi_1 = 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ szögeknél lesz a keresztfej a legtávolabb a forgáscentrumtól, és 1,75 m a legtávolabbi távolság. $b) \varphi_2 = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$ szögeknél van a keresztfej a legközelebb a forgáscentrumtól és 1,25 m a legközelebbi távolság.

$c) x = r \cdot \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi} = 0,25 \cdot \cos \varphi + \sqrt{2,25 - 0,0625 \cdot \sin^2 \varphi}$ (méter) a keresztfej távolsága a forgáscentrumtól φ szög függvényében.

3443. $a) \approx 4,305 \text{ m}^3 = 4305$ liter az olajtartály térfogata. $b) \approx 1041$ liter olaj van a tartályban, ≈ 159 liter a hiány. $\alpha \approx 130,56^\circ, t_{\text{szelet}} = t_{\text{cikk}} - t_{\text{háromszög}} = \frac{\alpha \cdot r^2 \cdot \pi}{360} - \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2} \approx 0,229745 \text{ m}^2$.

$V_{\text{olaj}} = t_{\text{szelet}} \cdot l \approx 1,040746 \text{ m}^3 \approx 1041$ liter.

3444. $a) e \approx 14,82$ cm a két tárcsa közös érintőszakaszainak a hossza. $b) i_1 \approx 12,07$ cm a nagyobbik tárcsán a tapadási felület hossza. $c) i_2 \approx 3,4$ cm a kisebbik tárcsán a tapadási felület hossza. $d) l \approx 45,11$ cm a meghajtósíj hossza.

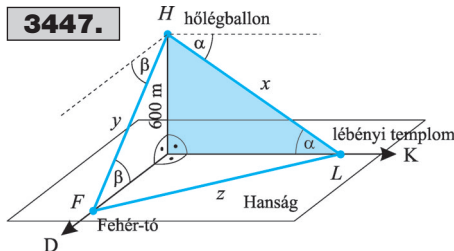
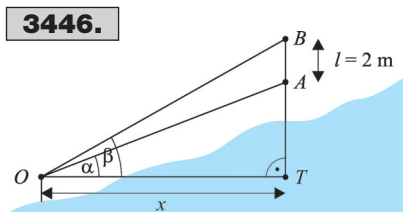
3445. $a) \alpha \approx 106,26^\circ$ a keresett szög nagysága, $r = 5$ m. $b) A \approx 7,48 \text{ m}^2$ a dongaboltozat keresztmetszete. $A = T_{\text{cikk}} - t_{\text{cikk}} = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \pi}{360} - \frac{\alpha \cdot r^2 \cdot \pi}{360}$, ahol $R = b + r$. $c) V \approx 53,86 \text{ m}^3$ a dongaboltozat térfogata. $d) m \approx 118,5$ tonna a boltozat tömege.

Híres dongaboltozatos templomok például a Santa Maria de Naranco templom Ovideo mellett, a St. Sernin templom Toulouse-ban és a La Madeleine templom (Vézelay). Egy korábbi feladatunkban említettük a lébényi Árpád-kori Szent Jakab templomot, ennek szintén dongaboltozata van, de ez nem az eredeti, mert a Bécs ellen vonuló törökök 1529-ben felgyújtották a templomot és beomlott az eredeti boltozat, 1683-ban másodszor is felgyújtották a törökök egy újabb Bécs elleni támadásnál.

3446. ≈ 124 m a rúd és a teodolit vízszintes távolsága. $\frac{AT}{x} = \text{tg } \alpha, \frac{BT}{x} = \text{tg } \beta,$

$l = BT - AT$.

3447. $a) x \approx 2,86$ km-re vagyunk a lébényi templomtól a hőlégballonnal. $b) y \approx 5,04$ km a hőlégballon és a Fehér-tó távolsága. $c) z \approx 5,73$ km-re van egymástól a tó és a templom.



IV

3448. a) $t_1 = \frac{1}{600} + \frac{k}{50}$ (másodperc), ahol $k \in \mathbf{Z}$, $t_2 = \frac{1}{120} + \frac{l}{50}$ (másodperc), ahol $l \in \mathbf{Z}$, időpontokban lesz a feszültség értéke a maximális feszültség felével egyenlő. $\frac{U_{\max}}{2} = U_{\max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$. b) $t'_1 = \frac{1}{600}$ s, $t'_2 = \frac{1}{120}$ s, $t'_3 = \frac{7}{600}$ s, $t'_4 = \frac{11}{600}$ s időpontokban lesz a feszültség abszolútértéke egyenlő a maximális feszültség felével, az első $\frac{1}{50}$ s-ban. c) $\approx 66,67\%$ -ban lesz nagyobb a feszültség abszolútértéke a maximális feszültség felénél. $\Delta t = t'_2 - t'_1$ és $\frac{2 \cdot \Delta t}{T} \cdot 100 \approx 66,67\%$, ahol $T = \frac{1}{50}$ s. Érdekes lerajzolnunk a szinuszfüggvény grafikonját.

3449. a) $t_1 = \frac{1}{400} + \frac{k}{50}$ (másodperc), ahol $k \in \mathbf{Z}$, $t_2 = \frac{3}{400} + \frac{l}{50}$ (másodperc), ahol $l \in \mathbf{Z}$, időpontokban lesz a feszültség értéke az effektív feszültséggel egyenlő.

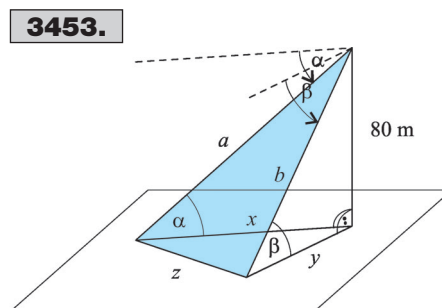
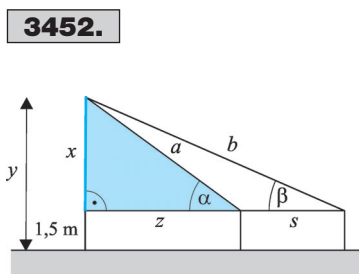
$U_{\text{eff}} = U_{\max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$, $U_{\text{eff}} = U_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$. b) $t'_1 = \frac{1}{400}$ s, $t'_2 = \frac{3}{400}$ s, $t'_3 = \frac{1}{80}$ s, $t'_4 = \frac{7}{400}$ s időpontokban lesz a feszültség abszolútértéke az effektív feszültséggel egyenlő az első $\frac{1}{50}$ s alatt.

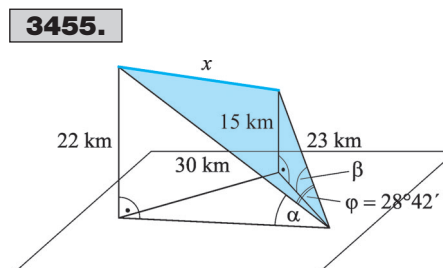
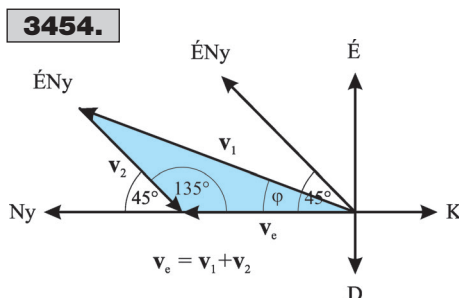
3450. $x \approx 55,6$ m. Alkalmazzuk a koszinusztételt!

3451. a) 1020 m az Aranyszarvas és a megfigyelő távolsága. b) 680 m a spanyol gálya és a megfigyelő távolsága. c) ≈ 350 méter az Aranyszarvas és a gálya távolsága. Alkalmazzuk a koszinusztételt! d) $\approx 11^\circ 9'$ -es szögben látja Sir Francis Drake a spanyol hajó és a megfigyelő távolságát. Alkalmazzuk a szinusztételt!

3452. $y \approx 61,4$ m magas a torony. Először számítsuk ki a β szöget a koszinusztétel segítségével. $a^2 = b^2 + s^2 - 2 \cdot b \cdot s \cdot \cos \beta$. Kapjuk, hogy $\beta \approx 23,78^\circ$. Majd $\frac{x}{b} = \sin \beta$ -ből kapjuk x -et. $y = x + 1,5$ m.

3453. a) $x \approx 2067$ m távolságra van az első mérésnél a hajó a torony aljától. $\frac{80}{x} = \text{tg } \alpha$.
b) $y \approx 1340$ m távolságra van a második mérésnél a hajó a torony aljától. $\frac{80}{y} = \text{tg } \beta$.





IV

c) $z \approx 813$ m utat tett meg a két mérés között a hajó. $a \approx 2068,6$ m és $b \approx 1342,4$ m, ezeket egy-egy megfelelő Pitagorasz-tétellel kaphatjuk. Majd alkalmazzuk a koszinusztételt a z távolságra felírva, az a , b és z oldalú háromszögből! d) $\approx 8,29 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a hajó sebessége.

3454. a) 42 perc 40 másodperc idő alatt érne a repülőgép az egyik repülőtérről a másikig. b) $\approx 110 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 396 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a repülőgép eredő sebessége a feladatbeli szél esetén. Írjuk fel a koszinusztételt a megfelelő sebességek alkotta háromszögre! $v_1^2 = v_2^2 + v_e^2 - 2 \cdot v_2 \cdot v_e \cdot \cos 135^\circ$, ahol $v_1 = 125 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a repülőgép sebességének nagysága szélcsendben, $v_2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a szél sebességének a nagysága, v_e a repülőgép sebességének nagysága a megadott szél esetén. c) $\approx 48,5$ perc a repülési idő a megadott szél esetén. d) $\varphi \approx 6,5^\circ$ szöggel kell oldalra kormányozni a repülőgépet kissé észak-nyugat felé. Alkalmazzuk a szinusztételt! $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin 135^\circ}{\sin \varphi}$.

3455. a) $\alpha \approx 47^\circ 10'$ szöget zár be az észlelési irány a Föld felszínével. b) $\beta \approx 40^\circ 42'$ szöget zár be a szétesési irány a Föld felszínével. c) $x \approx 14,78$ km utat tett meg a két mérés között a tűzgömb. Alkalmazzuk a koszinusztételt! $x^2 = 30^2 + 25^2 - 2 \cdot 30 \cdot 23 \cdot \cos 28^\circ 42'$. d) $v \approx 422 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a tűzgömb átlagos sebessége.

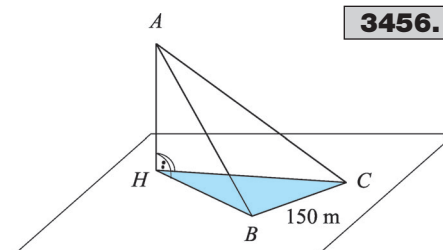
3456. a) $\angle BAC = 57^\circ 3'$. b) $AB \approx 145,9$ m. Alkalmazzuk a szinusztételt! $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle BAC}$.

c) $AH \approx 82,2$ m az antenna magassága. $\frac{AH}{AB} = \sin \angle ABH$.

3457. a) $\alpha = 37^\circ 29'$ és $\delta_1 = 30^\circ 30'$. b) $AB \approx 647,7$ m és $BD \approx 726,7$ m. $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$ és $\frac{BD}{BC} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \delta_1}$. c) $AD \approx 96,9$ m.

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos(\beta - \beta_1).$$

3458. a) $\alpha = 27^\circ 14'$ és $\delta_1 = 26^\circ 37'$. b) $AB \approx 722,6$ m és $BD \approx 666,5$ m. $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$, $\frac{BD}{BC} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \delta_1}$.



c) $AD \approx 767,4$ m.

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos(\beta + \beta_1).$$

3459. a) $BC \approx 1050,6$ m, $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_3}$. b) $CD \approx 1345,3$ m, $\frac{CD}{BC} = \frac{\sin \alpha_4}{\sin \alpha_5}$. c) $CE \approx 1061,1$ m,

$$\frac{CE}{CD} = \frac{\sin \alpha_7}{\sin \alpha_8}. \quad d) EF \approx 689,3 \text{ m}, \frac{EF}{CE} = \frac{\sin \alpha_{10}}{\sin \alpha_{12}}. \quad e) FG \approx 602,6 \text{ m}, \frac{FG}{EF} = \frac{\sin \alpha_{14}}{\sin \alpha_{15}}.$$

IV

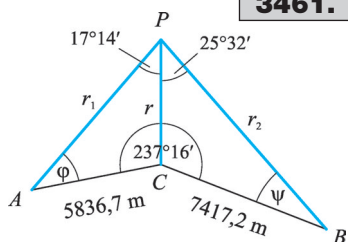
3460. a) $\varphi + \psi = 99^\circ 39'$. b) $\varphi \approx 25^\circ 48'$. $\frac{r}{a} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}$ és $\frac{r}{b} = \frac{\sin \psi}{\sin \beta}$, ezekből $\frac{a \cdot \sin \varphi}{\sin \alpha} =$

$$= \frac{b \cdot \sin \psi}{\sin \beta}. \quad \text{S innen } 2,2066 \cdot \sin \varphi \approx \sin(99^\circ 39' - \varphi). \quad \text{Majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési}$$

tételt az egyenlet jobb oldalára. Ezután osszuk $\cos \varphi$ -vel az egyenlet mindkét oldalát. Kapjuk,

hogy $\operatorname{tg} \varphi \approx 0,4835$. c) $r \approx 382,17$ m. d) $r_1 \approx 835,57$ m, $\frac{r_1}{a} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \alpha}$. e) $r_2 \approx 140,01$ m, $\frac{r_2}{b} =$

$$= \frac{\sin \gamma_2}{\sin \beta}. \quad \text{3461.}$$



$$= \frac{\sin \gamma_2}{\sin \beta}.$$

3461. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

a) $\angle PAC + \angle PBC = \varphi + \psi = 79^\circ 58'$.

b) $\angle PAC = \varphi = 36^\circ 44'$. c) $PC = r \approx 11783$ m. d) $PA = r_1 \approx$

$\approx 15931,7$ m. e) $PB = r_2 \approx 16039,7$ m.